XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 14 октября 2008.

Третий тур. Лига тактик.

1. Для положительных вещественных чисел x, y и z докажите неравенство:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right).$$

2. Вписанный четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Диагонали $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{CP}=\frac{AI^2}{CI^2}$.

3. Равнобедренные треугольники ABC и DBC имеют общее основание BC и при этом $\angle ABD=90°$. Пусть M — середина BC. Точки E на AB, P на MC и F на продолжении AC за точку C таковы, что $\angle BDE=\angle ADP=\angle CDF$. Докажите, что прямые DP и EF перпендикулярны.

4. Существует ли такая строго возрастающая последовательность $\{a_n\}$, что для любого целого a в последовательности a_n+a лишь конечное число простых чисел?

5. В тетраэдре $OABC$ ребра OA, OB и OC попарно перпендикулярны. Пусть r — радиус вписанной в него сферы, а H — ортоцентр грани ABC. Докажите, что $OH\leqslant r(\sqrt{3}+1)$.

6. Докажите, что единственным решением уравнения $5^a+1=3^b+7^c$ в целых неотрицательных числах является $a=b=c=0$.

7. В графе степень каждой вершины равна 10. Докажите, что на его ребрах можно расставить стрелочки так, чтобы максимальный ориентированный путь имел длину не более, чем 10 ребер.

8. Дано N бесконечных последовательностей цифр. Будем говорить, что две последовательности похожи, если они совпадают в бесконечном числе мест. Докажите, что все последовательности можно покрасить в 10 цветов так, что любые две одноцветные последовательности похожи.

9. Два игрока играют в такую игру: изначально на доскенаписано число 2. Игрок своим ходом может взять два уже написанных числа (можно брать одно и то же дважды) и выписывает на доску либо сумму, либо произведение взятых чисел. Все выписываемые числа должны быть различны и быть меньше 2007. Выигрывает тот, кто первым выпишет на доску число 2006. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

10. Решите в вещественных числах систему уравнений: $x+y^2=y^3$, $y+x^2=x^3$.

XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 14 октября 2008.

Третий тур. Лига тактик.

1. Для положительных вещественных чисел x, y и z докажите неравенство:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right).$$

2. Вписанный четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Диагонали $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{CP}=\frac{AI^2}{CI^2}$.

3. Равнобедренные треугольники ABC и DBC имеют общее основание BC и при этом $\angle ABD=90°$. Пусть M — середина BC. Точки E на AB, P на MC и F на продолжении AC за точку C таковы, что $\angle BDE=\angle ADP=\angle CDF$. Докажите, что прямые DP и EF перпендикулярны.

4. Существует ли такая строго возрастающая последовательность $\{a_n\}$, что для любого целого a в последовательности a_n+a лишь конечное число простых чисел?

5. В тетраэдре $OABC$ ребра OA, OB и OC попарно перпендикулярны. Пусть r — радиус вписанной в него сферы, а H — ортоцентр грани ABC. Докажите, что $OH\leqslant r(\sqrt{3}+1)$.

6. Докажите, что единственным решением уравнения $5^a+1=3^b+7^c$ в целых неотрицательных числах является $a=b=c=0$.

7. В графе степень каждой вершины равна 10. Докажите, что на его ребрах можно расставить стрелочки так, чтобы максимальный ориентированный путь имел длину не более, чем 10 ребер.

8. Дано N бесконечных последовательностей цифр. Будем говорить, что две последовательности похожи, если они совпадают в бесконечном числе мест. Докажите, что все последовательности можно покрасить в 10 цветов так, что любые две одноцветные последовательности похожи.

9. Два игрока играют в такую игру: изначально на доскенаписано число 2. Игрок своим ходом может взять два уже написанных числа (можно брать одно и то же дважды) и выписывает на доску либо сумму, либо произведение взятых чисел. Все выписываемые числа должны быть различны и быть меньше 2007. Выигрывает тот, кто первым выпишет на доску число 2006. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

10. Решите в вещественных числах систему уравнений: $x+y^2=y^3$, $y+x^2=x^3$.